放射線計測用電子回路講義

池田　博一
高エネルギー加速器研究機構　素粒子原子核研究所

平成15年7月22日

概 要

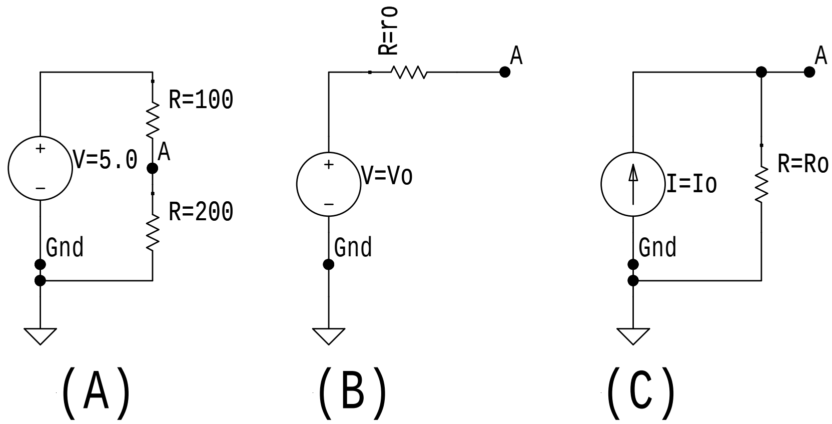
演習問題を提示します。演習問題のうち前半（パート１）については講義の中で取り上げる予定です。後半（パート２）については、単位認定のためのレポート問題の課題とします。単位の認定を必要とする方は、適宜３問を選択し所定の方法で提出して下さい。なお、付録としてラプラス変換の簡単な説明を掲げておきましたので必要に応じて参照して下さい。

目 次

1　演習問題パート１

問題１

図中 (A) の回路に対応するテブナンの等価回路（B) を求めよ。

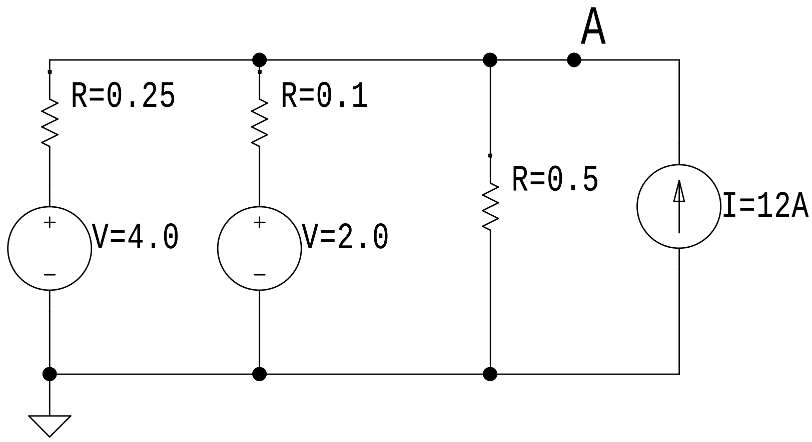


問題 2

問題 1 の図中 (A) に対応するノートンの等価回路 (C) を求めよ。

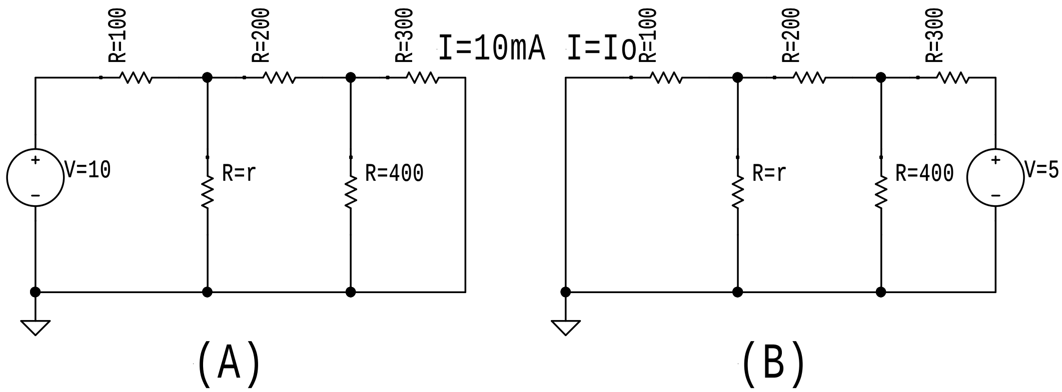
問題３

図中 A 点の電位を求めよ。



問題４

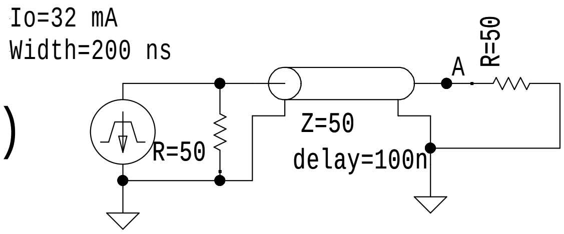
図中 (A) において右端に配置された 300 Ω の抵抗に 10 mA の電流が流れるとき、(B) において左端に配置された 100 Ω の抵抗に流れる電流を求めよ。



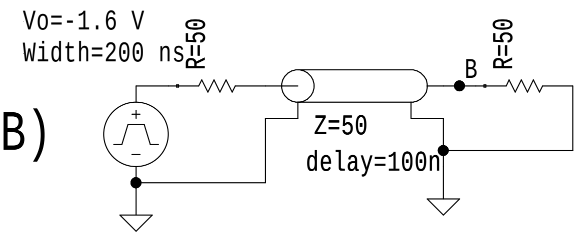
問題５

図中のＡ点、およびＢ点の電圧波形を図示せよ。その際、遅延時間と波高を明示すること。

(A)

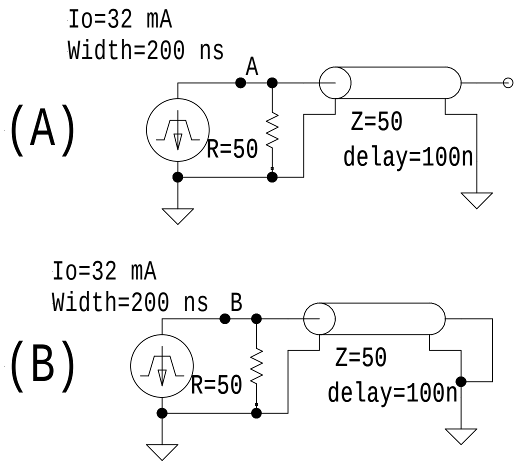


(B)



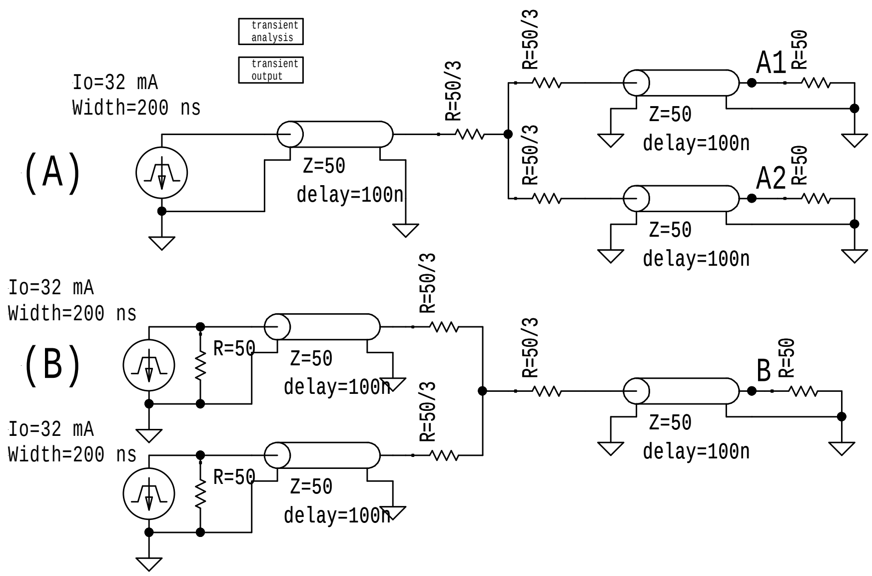
問題６

　図中の A 点、および B 点の電圧波形を図示せよ。その際、遅延時間と波高を明示すること。



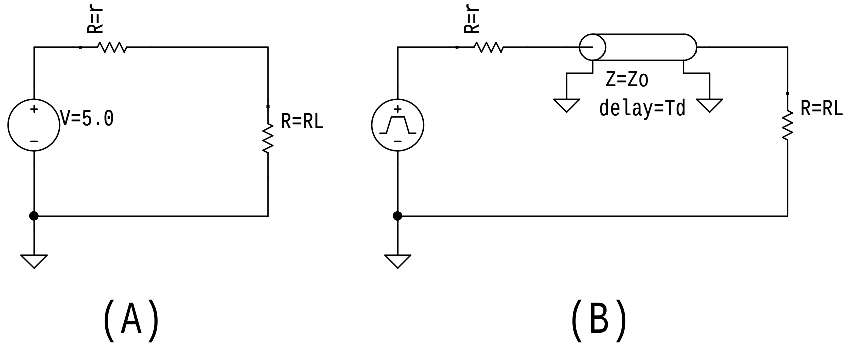
問題７

図中 A1 点、A2 点、及び B 点の電圧波形を図示せよ。その際、遅延時間と波高を明示すること。



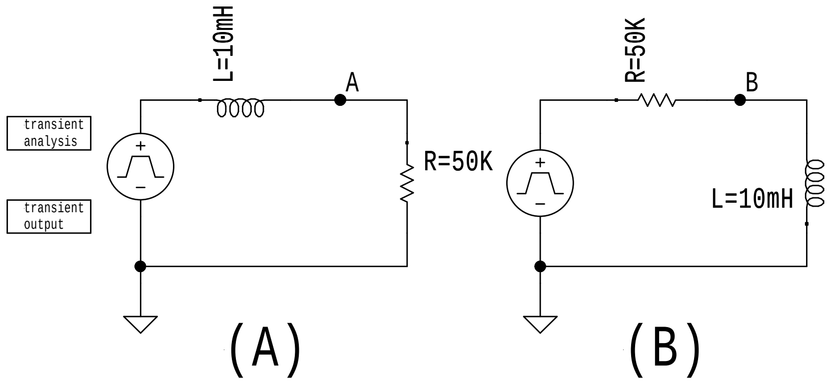
問題８

図中 (A)、及び (B) において、抵抗 R_L における電力消費量を最大化するための条件を求めよ。ただし、(B) において $r = Z_0$ とする。



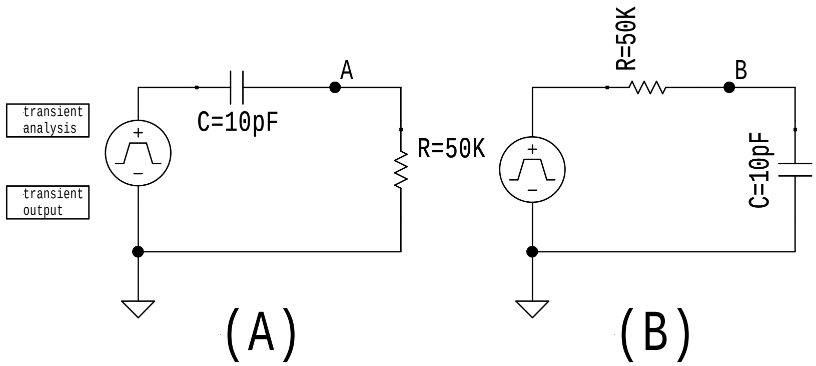
問題９

図中 A 点、及び B 点の電圧波形を求めよ。ただし、信号源を 1 V のステップ信号とする。



問題１０

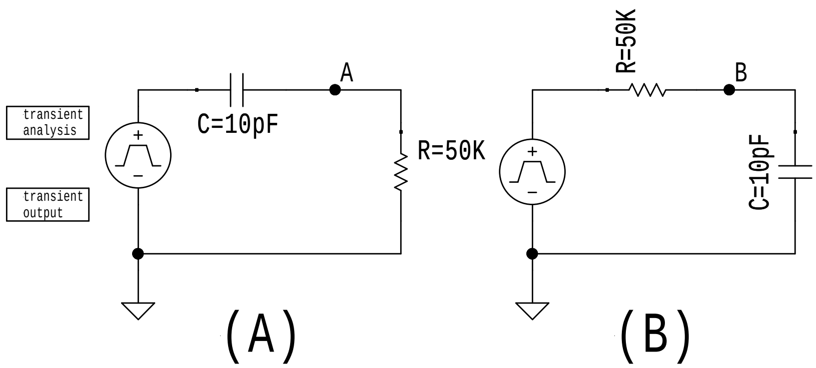
図中 A 点、及び B 点の電圧波形を求めよ。ただし、信号源を 1 V のステップ信号とする。



2　演習問題パート２

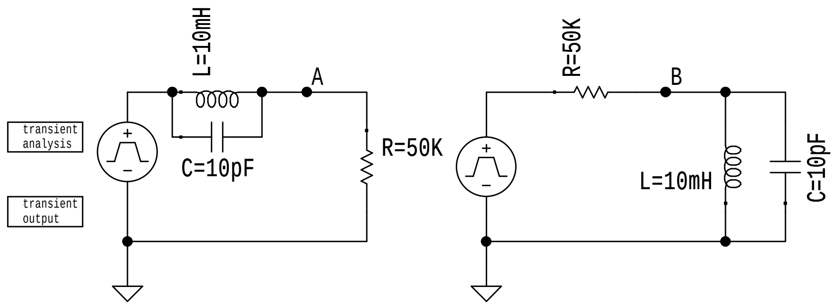
問題１１

図中 A 点、及び B 点の電圧波形を求めよ。ただし、信号源は、5 μs で 1 V に達するランプ信号とする。



問題１２

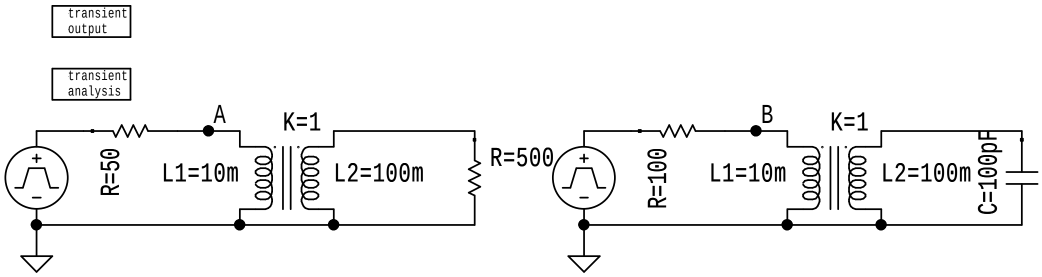
図中 (A) の構成、または (B) の構成において入力信号としてステップ信号を印加すると一般には減衰振動解を得る。そこで、減衰振動を回避するためにはR、C、L 間にどのような関係が成立すればよいか、(A)、及び (B) について示せ。



(A) (B)

問題１３

図中、A 点、および B 点の電圧波形を求めよ。ただし、信号源は、1 V のステップ信号とし、トランスは理想トランスとする。併せて、トランスは、負荷抵抗および負荷容量の見かけの値をどのように変更しているか考察せよ。

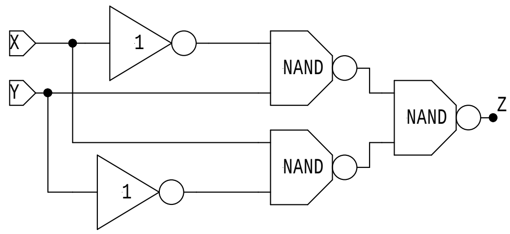


(A) (B)

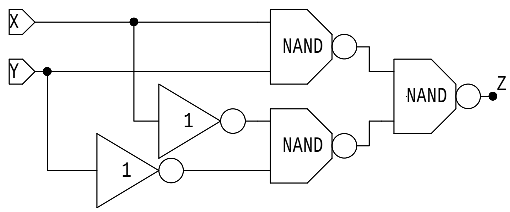
問題１４

図中 (A) の構成、(B) の構成、さらに (C) の構成における真理値表を完成せよ。併せて、これらの回路はそれぞれどのような目的で用いられるものか考察せよ。

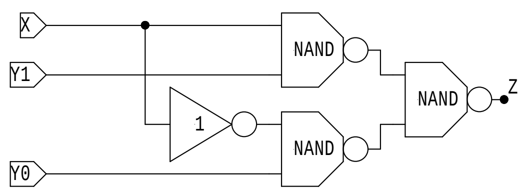
(A)



(B)

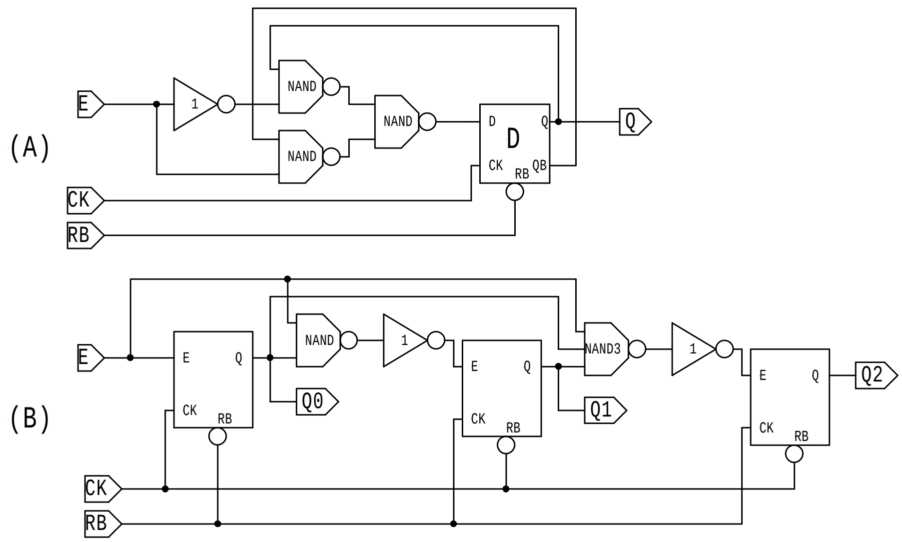


(C)



問題１５

図中 (A) の構成、および (B) の構成において、CK 信号が L から H に遷移するときに出力 (Q、Q_0、Q_1、Q_2) の変化の様子を求めよ。ただし、(A) の構成において用いられているフリップフロップ回路は、D タイプのフリップフロップである。また、(B) の構成で用いられているフリップフロップ回路は、イネーブル端子付のフリップフロップであって、(A) の回路構成そのものである。

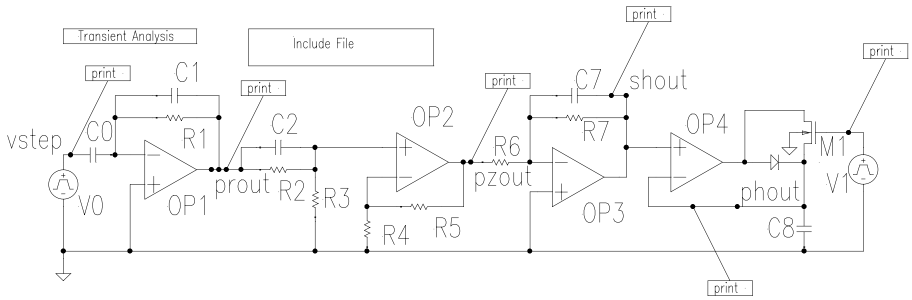


問題１６

同心球殻の検出器おいて、内球殻をアノード、外球殻をカソードとするとき検出器媒体中で発生した電荷による信号応答につき議論せよ。必要なパラメータについては各自定義するものとする。

問題１７

下図に示す信号処理回路におけるポール・ゼロ補償回路の作用を説明せよ。併せて、ポールゼロ補償回路が設けられていない信号処理回路で起こりうる不具合について考察せよ。



問題１８

信号処理系のインパルス応答を

$$
\begin{aligned}
h(t) &= t/T_1; for\ 0 < t \le T_1 \\
h(t) &= 1 + (T_1 - t)/T_2; for\ T_1 < t \le T_1 + T_2 \\
h(t) &= 0; for\ t > T_1 + T_2
\end{aligned}
$$

とする。

（１）このような信号処理系を、漏れ電流 i_l、検出器容量 C_D の検出器を読み出すために用いたとき等価雑音電子数を解析的に表せ。ただし、前置増幅器の直列雑音のかかる雑音抵抗を $\dfrac{2}{3g_m}$ と表すものとする。また、これ以外の雑音源は無視できるものとする。

（２）$i_l = 10\ nA$、$C_D = 10\ pF$、$g_m = 2.5\ mS$、$T_1 = 1\ \mu s$、とするとき、T_2 の関数として等価雑音電子数を評価せよ。

（３）$i_l = 10\ nA$、$C_D = 10\ pF$、$g_m = 2.5\ mS$、$T_2 = 1\ \mu s$、とするとき、T_1 の関数として等価雑音電子数を評価せよ。

A　ラプラス変換

A.1　フーリエ変換との対応

フーリエ変換において $s = i\omega$ と置き換えることによってラプラス変換に移ることができる。

ラプラス変換：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

ラプラス変換では、$t < 0$ の領域を取り扱わないことに注意すること。有限時間の過去であれば、時間軸の平行移動で足りる。

ラプラス逆変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

σ は、右半面におけるポールを拾えるように設定する。また、無限遠における積分路は、左半面を回る。

フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

フーリエ逆変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

無限遠における積分路は、上半面を回る。

A.2　ポールの取扱い

一般にラプラス変換は、s-平面上に極（ポール）を持つ。従って、ラプラス逆変換はこれらのポール対応する留数を数え上げることに対応する。

孤立ポールに対応する逆変換：

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{G(s)}{s-s_0}; no\ pole\ for\ G(s) \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{G(s)e^{st}}{s-s_0}ds \\ f(t) &= G(s_0)e^{s_0 t} \end{aligned}$$

したがって、s_0 が左半面にあれば $f(t)$ は、次第に減衰する波形を示すのに対して、s_0 が右半面にある場合には、$f(t)$ は、次第に発散する傾向をもつ。複数の孤立ポールがある場合には、それら全てについての寄与の合計が解となる。

縮退したポールに対応する逆変換：

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{G(s)}{(s-s_0)^2}; no\ pole\ for\ G(s) \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{G(s)e^{st}}{(s-s_0)^2}ds \\ f(t) &= (G'(s_0) + tG(s_0))e^{s_0 t} \end{aligned}$$

$G(s)e^{st}$ を s_0 近傍で展開して $(s-s_0)$ の係数に着目すればよい。減衰・発散についての条件は、孤立ポールの場合と同様である。

A.3 基本波形のラプラス変換

インパルス波形：いわゆる $\delta(t)$ に対応するラプラス変換を求めればよい。

$$\int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt \to 1$$

指数関数波形： $t<0$ では 0 であって、時間 0 で 1 まで立ち上がった後 e^{-at} のように減衰する波形である。

$$\int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt \to \frac{1}{s+a}$$

ステップ波形：$t>0$ で 1 となる信号をいう。

$$\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt \to \frac{1}{s}$$

ランプ波形：直線的に上昇する波形をいう。ここでは $r(t)=t/t_0$ とおく。

$$\int_0^\infty r(t)e^{-st}dt \to \frac{1}{t_0 s^2}$$

A.4 基本的な操作に対応するラプラス変換

微分操作に対するラプラス変換：

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \\ \to\quad & f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ \to\quad & -f(0+)+sF(s) \end{aligned}$$

従って、微分という操作は、因子 s を導入する。インダクタンスを sL のように表すことができることのひとつの説明である。なお、$f(t)=u(t)$ として、$u'(t)$ と $\delta(t)$ を同一のものと考えることの可否が問題となる。これは、$u(0+)=0$ と考えることにより一応回避することができる。

積分操作に対するラプラス変換：

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt\int_0^t d\tau f(\tau)e^{-st} \\ \to\quad & -\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t d\tau f(\tau)\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ \to\quad & \lim_{t\to 0+}\int_0^t f(\tau)d\tau + \frac{1}{s}F(s) \end{aligned}$$

容量を $\dfrac{1}{sC}$ のように表すことができることのひとつの説明である。ここでも $f(t) = \delta(t)$ とするとき $\lim_{t\to 0+}\int_0^t f(\tau)d\tau = 0$ と理解する必要がある。

遅延操作に対するラプラス変換：

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\ =\quad & \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\ =\quad & e^{-sa}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = e^{-sa}F(s) \end{aligned}$$

すなわち、時間領域で a だけ平行移動することは、ラプラス変換において因子 e^{-as} を導入することに対応する。

一方時間領域で e^{-at} を $f(t)$ に乗ずると、それに対するラプラス変換は、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \{e^{-at}f(t)\}e^{-st}dt &= \int_0^\infty f(t)\}e^{-(s+a)t}dt \\ &= F(s+a) \end{aligned}$$

となる。すなわち、因子 e^{-at} は、ラプラス変換を s 平面上で平行移動させることに対応する。

A.5　最終値の定理、初期値の定理

最終値の定理：s 平面での極限操作から $t \to \infty$ での極限値を求めることができる。すなわち、

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

である。$sF(s)$ をラプラス変換によって評価すると

$$\begin{aligned} sF(s) &= \int_0^\infty sf(t)e^{-st}dt \\ &= -\int_s^\infty f(t)\frac{d}{dt}e^{-st}dt \\ &= -f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt \\ &= f(0+) + \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt \end{aligned}$$

となる。上式に対して $s \to 0+$ の極限操作をすることにより、所要の結果を得る。

初期値の定理：s 平面での極限操作から $t \to \quad 0+$ での極限値を求めることができる。すなわち、

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

である。微分操作に対するラプラス変換

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = -f(0+) + sF(s)$$

において、$s \to \infty$ の極限操作をすることにより、所要の結果を得る。

以上