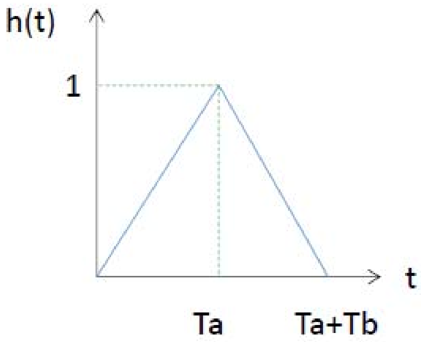
電子雑音の三角波整形増幅器に対する応答

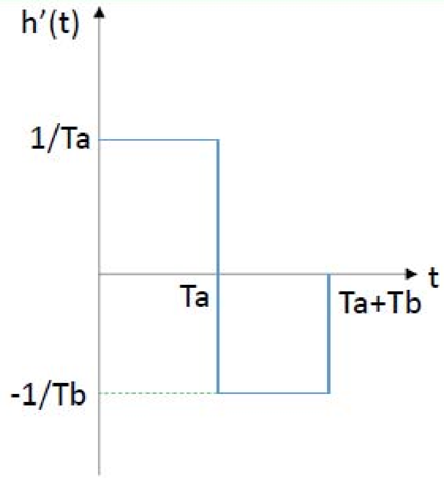
初版：June 23, 2020
改訂1:June 25,2020

宇宙科学研究所
池田　博一

三角波形に対する応答

三角波形のインパルスリスポンスに対してp14に記載した周波数領域での積分を実行することは、煩雑であるが、時間領域での積分であれば初等的な積分で評価することができる。





$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\infty} h^2(t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^{Ta}(t/Ta)^2dt + \frac{1}{2}\int_{Ta}^{Ta+Tb}(1-\frac{t-Ta}{Tb})^2dt \\
&= \frac{1}{6}(Ta+Tb)
\end{aligned}
$$

Ta, Tbに比例するという特徴を有する。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^{\infty} (h'(t))^2dt &= \frac{1}{2}\int_0^{Ta}(1/Ta)^2dt + \frac{1}{2}\int_{Ta}^{Ta+Tb}(1/Tb)^2dt \\
&= \frac{1}{2}(1/Ta+1/Tb)
\end{aligned}
$$

1/Ta, 1/Tbに比例するという特徴を有する。

ここまでは、とても簡単なのだが、1/fの取り扱いに困難があると思っていた。

「三角波形は、矩形波のコンボリューションで表すことができる。

そうするとフーリエ変換も簡単にできる」、という情報処理技術の常識があることが分かった。

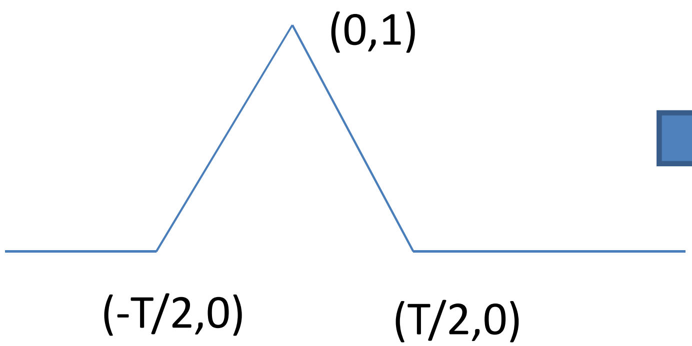
Definitions [edit]

The most common definition is as a piecewise function:

$$\begin{aligned}\operatorname{tri}(x) = \Lambda(x) &\overset{\text{def}}{=} \max\left(1 - |x|, 0\right) \\ &= \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}\end{aligned}$$

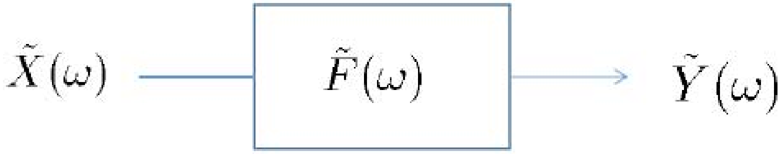
Equivalently, it may be defined as the convolution of two identical unit rectangular functions:

$$\begin{aligned}\operatorname{tri}(x) &= \operatorname{rect}(x) * \operatorname{rect}(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}(x - \tau) \cdot \operatorname{rect}(\tau)\, d\tau.\end{aligned}$$



H(ω) =(8/T)sin^2(ωT/4)/ω^2

フーリエ変換



$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} exp(-j\omega t)X(t)dt$$

$$\tilde{Y}(\omega) = \tilde{F}(\omega)\tilde{X}(\omega)$$

コンボリューション -----> 積に置き換わる

パワー積分

Parsevalの定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{F}(\omega)|^2 df$$

$$when\ F(t) = 0\ for\ t < 0$$

$\tilde{F}(\omega), F(t)$ が二乗可積分であれば

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} |F(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} |\tilde{F}(\omega)|^2 df$$

$\omega\tilde{F}(\omega), F'(t)$ が二乗可積分であれば

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} |F'(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} \omega^2 |\tilde{F}(\omega)|^2 df$$

Ωが偶関数であることを用いている。

前のページのH(ω)を用いてパワー積分が一致することを確かめることができる。

必要な積分は、

sin^4(x)/x^4 の[0, inf)   --- >> pi/3になることと
sin^4(x)/x^2の[0, inf)   --- >> pi/4になることをもちいればよい。

さて1/fのところは、
ωT/4 --- >> x   と積分変数を代えてあげると
Cd^2*Kf*4sin^4(x)/x^3を[0,inf)で積分すればよいことになる。

sin^4(x)/x^3の積分は、mathlabのintで実行すると2/3が返ってくるのだが、
Trapzで数値積分を試したところln2が正解であることが分かった。

Kf^2とあったところをKfに修正した。

別途実時間領域で無理やり積分を実行すると4ln2を再現することできていた。
“at home”での成果。

Cd^2*ω^2がぬけている

1/f 雑音の時間領域での評価方法が問題となるが、1/f 雑音については、時間領域での評価方式の方が、一般的には、むしろ複雑である。

評価すべき積分は、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{K_f}{f}|H(\omega)|^2 df &= \int_0^\infty d\tau_1 h(\tau_1)\int_0^\infty d\tau_2 h(\tau_2)\int_0^\infty d\omega K_f \omega e^{-i(\tau_1-\tau_2)\omega} \\ &= \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 K_f C_D^2 h'(\tau_1)h(\tau_2)\int_0^\infty d\omega \frac{1}{i} e^{-i(\tau_1-\tau_2)\omega}\end{aligned}$$

である。第二式においては、τ_1 について部分積分を行った。ω についての積分は、超関数を含む形で、

$$\int_0^\infty d\omega \frac{1}{i} e^{-i(\tau_1-\tau_2)\omega} = -\mathbf{vp}\{\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\} - i\pi\delta(\tau_1-\tau_2)$$

のように表せることが知られている。$\mathbf{vp}\{\frac{1}{x}\}$ は、この関数を被積分関数とするときには、原点の近傍を除外して積分すべきこと (これを「主値積分」という。) を表している。

δ 関数に関係する部分について着目すると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 K_f C_D^2 h'(\tau_1) h(\tau_2)\{-i\pi\delta(\tau_1-\tau_2)\} &= -i\pi \int_0^\infty d\tau K_f C_D^2 h'(\tau) h(\tau) \\ &= 0\end{aligned}$$

となるから、結局、

$$I_f = -\int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 K_f C_D^2 h'(\tau_1) h(\tau_2) \mathbf{vp}\{\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\}$$

46 $\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} df = \delta(\tau)$ である。

主値積分に注意しながら、積分を実行していくと、最後のところで
2*(1-x)ln(1/x^2-1)を[0,1]で積分することになったのだが、これが4ln2を与える。
mathlabも、これに対しては正しい値を返してくれた。

ということで、先の積分は4ln2でよさそうである。
sin^4(x)/x^3の積分が何者なのかいまだ不明です、わかったら教えてください。

Appendix1: 非対称三角波に対する雑音応答

$H(\omega) = (1/(\omega^2 TaTb))*(Ta + Tb - Ta*\exp(-i\omega Tb) - Tb*\exp(i\omega Ta))$

までは良いのだが、$|H(\omega)|^2$を整理するのが厄介である。

結局

$$|H(\omega)|^2 = (4/\omega^4)*[\ \{ (1/Tb)*\sin(\omega Tb/2) - (1/Ta)*\sin(\omega Ta/2) \}^2 + (4/(TaTb))*\sin(\omega Ta/2)*\sin(\omega Tb/2)*\sin^2(\omega(Ta+Tb)/4)\ ]$$

と整理できる。 Ta=Tb=T/2のときに第3ページのH(ω)のパワーに一致することも確認できる。

$\eta = Ta/(Ta+Tb)$、$T = Ta+Tb$として、さらに$\omega^2 Cd^2 Kf/f$も含めてもう一度整理すると

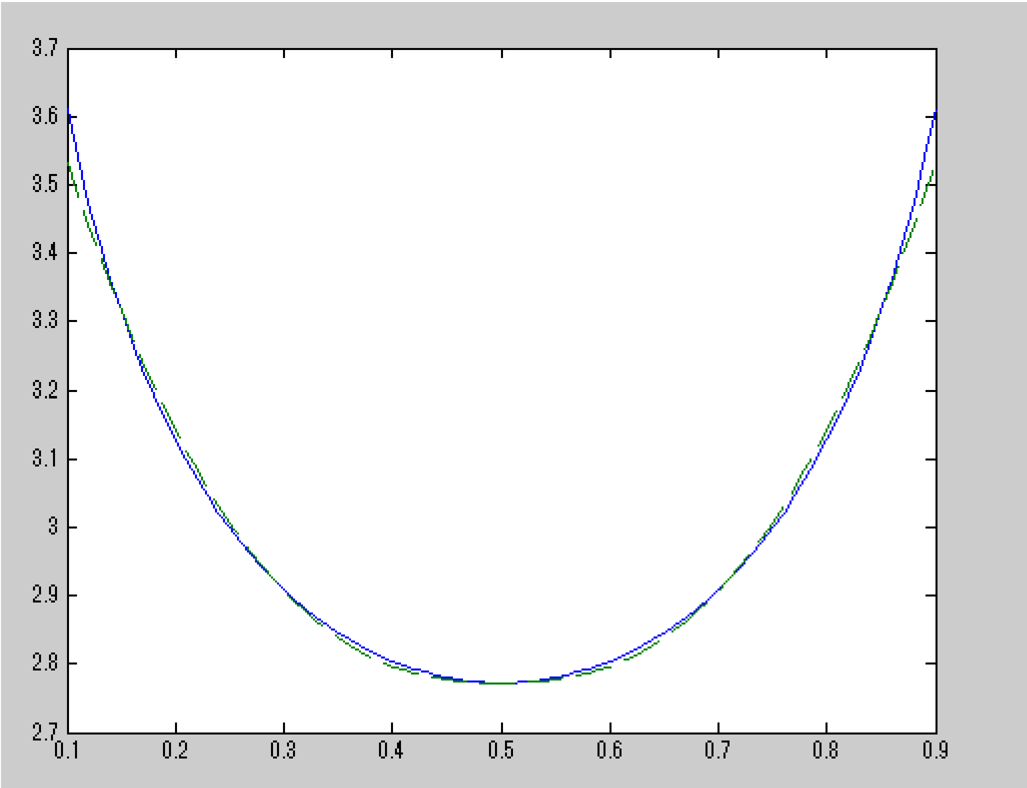
$$(\omega^2 Cd^2 Kf/f)*|H(\omega)|^2\, df =$$

$$Cd^2 Kf *(1/x^3)*[\ \{ (1/(1-\eta))\sin((1-\eta)x) - (1/\eta)*\sin(\eta x) \}^2$$

$$+ (4/(\eta(1-\eta)))*\sin(\eta x)*\sin((1-\eta)x)*\sin^2(x/2)\ ]\ dx$$

η = 0.5　のときには、　x/2 --- >> x と変換すれば、
第5ページ目の積分に一致することが分かる

そこで、Cd^2Kfの因子を除いて、数値積分を実行してみると下図（実線）のようである。



横軸は、ηである。

破線は、
4ln2+7.5*|η-0.5|^2.5
; 実用的には使えそう！

Appendix 2. CR-RCフィルターとの比較

	i_n^2	v_n^2	1/f
CR-RC	(e^2/8)*Tp	(e^2/8)/Tp	e^2/2
Triangular	(1/(6η))*Tp	(1/(2*(1-η))/Tp	4ln2 (min at η=0.5)

η = 0.5として数値を入れてみると

	i_n^2	v_n^2	1/f
CR-RC	0.9236*Tp	0.9236/Tp	3.6953
Triangular	0.3333*Tp	1./Tp	2.7726

三角波整形は、シリーズ雑音に対してはCR-RCとほぼ同等だが、
パラレル雑音、フリッカー雑音に対しては優位である。

以上