

---

# Electronics for Particle Measurement

Hirokazu Ikeda

iked@post.kek.jp

School of Mathematical and Physical Science

The Graduate University for Advanced Studies

July 30, 2002

---

## Abstract

The basics of an integrated circuit are described with special emphasis placed on a charge-measurement system. Starting with an outline of a fine CMOS technology, the discussion moves to a practical implementation of circuits.

## Contents

<b>9</b>	<b>Signal processing with a discrete time domain</b>	<b>1</b>
9.1	Discrete time signal processing . . . . .	1
9.2	Double-correlated sampling . . . . .	2
9.2.1	Noise reduction with an incomplete integrator . . . . .	3
9.2.2	Noise reduction with a complete integrator . . . . .	3
9.3	General approach for discrete signal processing . . . . .	4
9.4	Reconstruction of the input-signal series . . . . .	5
9.4.1	Signal reconstruction with RC filter . . . . .	5
9.4.2	Signal reconstruction with a CR-RC filter . . . . .	6
9.5	Evaluation of the input equivalent noise charge . . . . .	7
9.5.1	Contribution of the parallel noise . . . . .	7
9.5.2	Contribution of the series noise . . . . .	8
9.6	Reconstruction of the asynchronous input signal series . . . . .	11
9.7	Resolution of the reconstructed signal series . . . . .	12
9.7.1	Amplitude resolution . . . . .	12
9.7.2	Timing resolution . . . . .	13
9.7.3	Examples . . . . .	13

## 9 Signal processing with a discrete time domain

### 9.1 Discrete time signal processing

離散時間系の信号処理とは、時間軸が離散化されているようなシステムにおける信号処理をいう。信号振幅がデジタル化されているか否かを問わないが、一般にアナログ信号を一定の時間間隔で A/D 変換した信号に係る処理とのなじみが良い。

まず、最も単純な事例として、いわゆる相関二重サンプリング方式を用いて離散時間系の信号処理の特徴について議論したのち、より一般的な手法を用いた信号処理方式を紹介する。

The discrete-time signal processing deals with signals on a discrete time domain. Although it is irrelevant with amplitude digitization, it is easy to conform with the constant-rate waveform sampling system with an A/D converter.

We first discuss the so-called double-correlated sampling, where we find some characteristics associated with discrete-time signal processing. An introduction to a general approach with discrete signal processing follows.

## 9.2 Double-correlated sampling

相関二重サンプリングとは、同一の信号を一定時間間隔で二度サンプルし、その差額をもって信号の波高値を得るものである。当該信号を  $f(t)$  とし、サンプル間隔を  $\tau$  とすると、サンプルされた信号の差額は、

$$f(t_0) - f(t_0 - T_s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_0} (1 - e^{-i\omega T_s}) \hat{f}(\omega) d\omega,$$

と表わすことができる。ただし、 $\hat{f}(\omega)$  は、 $f(t)$  のフーリエ変換である。したがって、相関二重サンプリングによって導入される、フーリエ変換における因子は、 $e^{i\omega t_0}$  を除けば、 $1 - e^{-i\omega T_s}$  と表わすことができる。さらに、 $f(t)$  は、検出器に発生した電荷の積分信号に対応しているものとする、 $\hat{f}(\omega) = \frac{Q_0}{i\omega}$  であるから、総合応答は、

$$H(\omega) = \frac{1 - e^{-i\omega T_s}}{i\omega} Q_0 \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq 0 \\ Q_0 & \text{for } 0 < t < T_s \\ 0 & \text{for } t \geq T_s. \end{cases}$$

となる。このようにして相関二重サンプリングにおける実効的なインパルス・リスポンスを得ることができた。しかし、上記インパルス・リスポンスを用いて等価雑音電子数の算出を試みると、直ちに困難に直面する。すなわち

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \omega^2 d\omega.$$

が収束しないのである。

そこで、 $H(\omega)$  は、高周波成分を抑制するようなフィルター因子を伴っている必要があることが分かる。

具体的には、不完全積分型のフィルターと完全積分型のフィルターを考えることができる。

前者は、 $\frac{1}{1 + i\omega T_M}$  のような伝達特性を有するフィルターであり、後者は、 $\frac{1 - e^{-i\omega T_M}}{i\omega}$  のような伝達特性を有するフィルターである。後者については、 $T_M \leq T_s$  のように設定するものとする。

Double-correlated sampling employs two data points separated by a predetermined time interval. The amplitude difference between the two provides a net amplitude for the input signal. When a wave form  $f(t)$  is sampled with a time interval  $T_s$ , the double correlated sampling yields

where  $\hat{f}(\omega)$  is the Fourier transform of  $f(t)$ , and, hence, the factor introduced by the double correlated sampling is  $1 - e^{-i\omega T_s}$ , except for the phase factor,  $e^{i\omega t_0}$ , in terms of the Fourier transform. Assuming that  $f(t)$  represents an integration of the charge generated in a detector medium, the Fourier transform,  $\hat{f}(\omega)$ , will be  $\hat{f}(\omega) = \frac{Q_0}{i\omega}$ , and, hence, the time domain presentation for  $(1 - e^{-i\omega T_s})\hat{f}(\omega)$  is written as follows:

In this way, we obtain an effective impulse response for the double correlated sampling system. Once we try to figure out the equivalent noise charge, we soon encounter an obstacle, i.e. non-convergence of the integral

In order to provide a remedy for the integration, the transfer function should be accompanied by a suppression factor for the high-frequency region.

We examine here the incomplete/complete integration filter as a high-frequency suppression factor.

The incomplete integrator can be presented as  $\frac{1}{1 + i\omega T_M}$ , while the complete integration filter can be presented as  $\frac{1 - e^{-i\omega T_M}}{i\omega}$  with a subsidiary condition,  $T_M \leq T_s$ .

### 9.2.1 Noise reduction with an incomplete integrator

不完全積分器を用いると  $t = 0$  に発生した電荷信号は、 $t = T_s$  において最大波高を採るから、正規化因子  $N$  は、

$$N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\omega\tau}}{i\omega} Q_0 \frac{1}{1 + i\omega T_M} e^{i\omega\tau} df = 1 \rightarrow N = \frac{T_M}{Q_0(1 - e^{-\tau/T_M})}.$$

のよう決定することができる。そこで、所要の雑音パワーに係る積分は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 df &= \frac{1}{2(1 - e^{-T_s/T_M})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1 - e^{-i\omega T_s}|^2}{\omega^2} \frac{1}{|1 + i\omega T_M|^2} df \\ &= \frac{T_s - T_M(1 - e^{-T_s/T_M})}{2(1 - e^{-T_s/T_M})^2}, \text{ and} \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H(\omega)|^2 df &= \frac{1}{2(1 - e^{-T_s/T_M})^2} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - e^{-i\omega T_s}|^2 \frac{1}{|1 + i\omega T_M|^2} df \\ &= \frac{1}{T_M(1 - e^{-T_s/T_M})}. \end{aligned}$$

第一の積分がショット雑音その他並列雑音に対するウェイトを与え、第二の積分が直列雑音に対するウェイトを与えている。これらの積分に共通の特徴として、分母に現われる因子  $1 - e^{T_s/T_M}$  がある。この因子は、 $T_s/T_M \rightarrow 0$  のとき積分を発散させるように作用する。

Employing the incomplete integrator, the peak of the impulse response appears at  $t = T_s$ , and, hence, the normalization factor ( $N$ ) of the transfer function ( $H(\omega)$ ) is evaluated as

Then, the integrals required to evaluate the equivalent noise charge are

The first integral provides a weight for the parallel noise, such as shot-noise and etc., while the second integral provides a weight for the series noise. A common factor,  $1 - e^{T_s/T_M}$ , located at the denominator of the above integrals, makes the integrals tend to infinity when  $T_s/T_M \rightarrow 0$ .

### 9.2.2 Noise reduction with a complete integrator

積分時間  $T_M$  の完全積分器を伴う二重相関サンプリングシステムにおいて、 $t = 0$  に発生した電荷信号は、 $t = T_M$  において最大波高をとるものとすると、正規化因子は、

$$N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\omega\tau}}{i\omega} Q_0 \frac{1 - e^{-i\omega T_M}}{i\omega} e^{i\omega T_M} df = 1 \rightarrow N = \frac{1}{T_M Q_0}.$$

のよう決定することができる。そこで、所要の雑音パワーに係る積分は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 df &= \frac{1}{2T_M^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(1 - e^{-i\omega T_s})(1 - e^{-i\omega T_M})|^2}{\omega^4} df \\ &= \frac{T_s - T_M/3}{2}, \text{ and} \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \omega^2 df &= \frac{1}{2T_M^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(1 - e^{-i\omega T_s})(1 - e^{-i\omega T_M})|^2}{\omega^2} df \\ &= \frac{1}{T_M}. \end{aligned}$$

Taking into account that the peak amplitude of the double-correlated sampling system with the complete integrator appears at  $t = T_M$  for the impulse response, we can obtain the normalization constant ( $N$ ) for the transfer function ( $H(\omega)$ ) as follows:

Employing the normalization constant ( $N$ ), we obtain the integrals to evaluate the equivalent noise charge as follows:

不完全積分器の場合には、分母に  $1 - e^{-T_s/T_M}$  のような因子が存在するため雑音パワーに係る積分を増大させる結果となっていたが、完全積分器によれば、そのような不具合はない。また、 $T_M \rightarrow 0$  の極限では、完全積分器による方式と、不完全積分器による方式は、一致することが分かる。

ちなみに、CCDのように漏れ電流が無視できて、しかも、出力容量が小さな検出器では、本方式により  $10e$  以下の雑音レベルを達成することも可能である。

例えば、 $C_D = 0.1 \text{ pF}$ 、 $g_m = 0.1 \text{ mS}$ 、 $T_M = 4 \text{ } \mu\text{s}$  とすると、フローティングゲートに係る MOSFET の雑音に限定すれば常温でも  $3.23e$  程度の値である。

The integrals with the complete integrator are free from the divergent factor,  $1 - e^{-T_s/T_M}$ , in their denominators.

In the limit of  $T_M \rightarrow 0$ , the integrals with the incomplete/complete integrators tend to coincide with each other, as is intuitively implied.

As in the case of a CCD readout with a small detector capacitance as well as negligible leakage current, double-correlated sampling with the complete integrator has a good chance to provide an extremely low noise characteristics of less than 10 electrons.

Assuming  $C_D = 0.1 \text{ pF}$ ,  $g_m = 0.1 \text{ mS}$ , and  $T_M = 4 \text{ } \mu\text{s}$ , we obtain an equivalent noise charge of 3.23 electrons even at room temperature as long as we are concerned with the series noise associated with the MOSFET attached to the floating gate.

### 9.3 General approach for discrete signal processing

インパルス応答が  $f(t)$  であるようなシステムにおいて、定時間間隔すなわち  $\{t = nT_s | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$  で、出力信号をサンプリングし、時間  $\tau < T_s$  の間だけこれをホールドするものとする。ホールドされた信号をラプラス変換で表現すると

$$Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kT_s} \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} I(s),$$

と表わすことができる。ただし、 $f_k = f(kT)$  であり、 $I(s)$  は入力信号インパルス列のラプラス変換である。ここで、 $e^{-kT_s}$  が  $kT$  だけの遅延を表わしており、 $\frac{1 - e^{-\tau s}}{s}$  が時間幅  $\tau$  の矩形（すなわちホールド）を表わしていることに注意されたい。一方、測定結果として出力信号の時系列  $\{A_n\}$  を得たとすると、それに対応するラプラス変換は、

As for a signal-processing system whose impulse response is  $f(t)$ , we sample its amplitude with a certain time interval  $T_s$ , i.e. at  $\{t = nT_s | n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , and hold them during the time  $\tau < T_s$ . The Laplace transform of the sampled series is written as

where  $f_k = f(kT)$ , and  $I(s)$  is the Laplace transform of the input series of charge impulse. You should be aware that  $\frac{1 - e^{-\tau s}}{s}$  represents a rectangle with a width of  $\tau$ , i.e. hold. On the other hand, assuming that the observed series of the output waveform is presented as  $\{A_n\}$ , we obtain its Laplace transform as follows:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-kT_s} \frac{1 - e^{-\tau s}}{s},$$

となる。これを、 $Q(s)$  と等置することにより、

which can be equated with  $Q(s)$  to yield

$$I(s) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-kT_s}}{\sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kT_s}}.$$

を得る。ここで、

If we can rewrite the denominator of the above equation as

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-kT_s s}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-kT_s s},$$

のように書き下すことができれば、これを用いて

we eventually reconstruct the input series of the charge impulse in terms of the output series, which can be organized as follows:

$$\begin{aligned} I(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-kT_s s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-kT_s s} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_k g_l e^{-(k+l)T_s s} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-mT_s s} \sum_{k=0}^{\infty} A_k g_{m-k}. \end{aligned}$$

のように入力信号系列を再構成することができる。すなわち、入力信号が、離散時間点におけるインパルス系列として得られることになる。ちなみに、 $z = e^{T_s s}$  とおきかえた  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$  を、 $\{f_n\}$  の  $z$ -変換といい、 $\Delta\Sigma$  モジュレータその他の SC 回路における信号解析において常用されている。

Once we substitute  $e^{T_s s}$  with a variable  $z$ , we obtained  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k}$ , which is called the  $z$ -transformation of  $f(t)$ . The  $z$ -transformation is a basic technique to deal with signal processing in a discrete time domain, and is frequently employed for an analysis of SC-circuits, such as  $\Delta\Sigma$ -modulators and so forth.

## 9.4 Reconstruction of the input-signal series

### 9.4.1 Signal reconstruction with RC filter

§9.3 で示した、入力信号の再構成手法の具体例を示そうと思う。荷電増幅器のような積分型の増幅器の出力に時定数  $T_M$  の低周波通過フィルターを設けたとすると、その出力信号は、時間領域で  $f(t) = 1 - e^{-t/T_M}$  のように振る舞う。したがって、その  $z$ -変換は、

We now show a practical technique to reconstruct the input series.

Assuming that we have equipped a low-pass filter with its time constant of  $T_M$  at the output of a charge-sensitive preamplifier, we obtain the impulse response,  $f(t) = 1 - e^{-t/T_M}$ , in time domain, and, hence, its  $z$ -transformation is

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-x} z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-x})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-x} z^{-1})}, \end{aligned}$$

のように表わすことができる。ただし、 $x = T_s/T_M$  である。さらに、

where  $x$  is defined as  $x = T_s/T_M$ . Taking an inverse of  $F(z)$ , we obtain

$$F(z)^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} z - \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} z^0 + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} z^{-1},$$

のように書き下すことができる。したがって、入力信号系列  $\{I_n\}$  は、

and, hence, the input series  $\{I_n\}$  can be reconstructed as

$$I_n = A_{n+1}g_{-1} + A_n g_0 + A_{n-1}g_1.$$

のように再構成することができる。すなわち、出力信号系列のうち連続する3点を用いて各時刻における入力信号を再構成できることを意味している。ただし、

You should be aware that the input series can be reconstructed with three consecutive data points of the output series. The coefficients  $g_{-1}$ ,  $g_0$ , and  $g_1$  are

$$\begin{aligned} g_{-1} &= \frac{1}{1 - e^{-x}}, \\ g_0 &= -\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \text{ and} \\ g_1 &= \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}. \end{aligned}$$

である。

なお、 $g_{-1} + g_0 + g_1 = 0$  であることは、 $\{A_n\}$  がサンプリング間隔との比較で十分ゆっくりと変化するようなオフセットを被っていたとしても信号の再構成に与える影響は無視できるレベルに留まることを意味している。

なお、現実の荷電増幅型の前置増幅器が有する減衰時定数の効果は、減衰時定数がサンプリング間隔に比べて十分大きいという仮定のもとに補正が可能である。

Because of the special property  $g_{-1} + g_0 + g_1 = 0$ , a finite offset for the output series or a very low-frequency external noise interfering with the output can be suppressed to negligibly affect the reconstruction of the input series.

The effect of the decay time constant of the preamplifier can be corrected under a condition that the decay time constant is large enough compared to the sampling interval.

#### 9.4.2 Signal reconstruction with a CR-RC filter

§9.4.1 のおけるのと同様にして、荷電増幅器の出力に、同一の時定数  $T_M$  を有する微分・積分回路を直列に設けると、そのインパルス・リスポンスは、 $f(t) = (t/T_M)e^{1-t/T_M}$  のようになる。したがって、その  $z$ -変換は、 $F(z) = \frac{xe^{1-x}z^{-1}}{(1 - e^{-x}z^{-1})^2}$  のように表わすことができる。そこで、 $F(z)^{-1}$  が

Employing a CR-RC filter at the output of a preamplifier with an identical time constant for differentiation and integration, we obtain an impulse response of  $f(t) = (t/T_M)e^{1-t/T_M}$  and, hence, its  $z$ -transformation is written as  $F(z) = \frac{xe^{1-x}z^{-1}}{(1 - e^{-x}z^{-1})^2}$ . Taking an inverse of  $F(z)$  as

$$F(z)^{-1} = \frac{e^{-1+x}}{x}z - \frac{2e^{-1}}{x}z^0 + \frac{e^{-1-x}}{x}z^{-1},$$

となることに注意すると、

where we find the coefficients to be employed for the reconstruction of the input series as follows:

$$\begin{aligned} g_{-1} &= \frac{e^{-1+x}}{x}, \\ g_0 &= -\frac{2e^{-1}}{x}, \text{ and} \\ g_1 &= \frac{e^{-1-x}}{x}. \end{aligned}$$

を用いて、入力信号を再構成することができる。CR-RC フィルターの場合には、RC フィルターとは異なり、 $g_{-1} + g_0 + g_1 \neq 0$  である。したがって、出力におけるオフセットについては、RC フィルターの場合のような利益を享受することができないことに注意する必要がある。

The sum of the coefficients is not zero for a system with a CR-RC filter, which is quite different from the case of a RC filter.

## 9.5 Evaluation of the input equivalent noise charge

### 9.5.1 Contribution of the parallel noise

パラレル雑音とは、本来の信号源と並列に配置された雑音源を想定するものであるから、それに対応する信号系列  $\{I_{pn}\}$  は、本来の信号と同様に書き下すことができる。すなわち、本来の信号は、

$$I_n = A_{n+1}g_{-1} + A_n g_0 + A_{n-1}g_1.$$

のようにして、入力信号を再構成することができる。そこで、これを用いて  $\langle I_{pn}^2 \rangle$  を評価することにする。具体的に書き下すと

$$\langle I_p^2 \rangle = (g_{-1}^2 + g_0^2 + g_1^2) \langle A_p^2 \rangle + 2(g_{-1} + g_1)g_0 C_{p1} + 2g_{-1}g_1 C_{p2},$$

となる。ここでは、定常性を仮定したので、 $n$  に関する依存性は、消失している。なお、 $\langle A_p^2 \rangle = \langle A_{p(n+1)}^2 \rangle = \langle A_{pn}^2 \rangle = \langle A_{p(n-1)}^2 \rangle$ 、 $C_{p1} = \langle A_{p(n+1)}A_{pn} \rangle = \langle A_{pn}A_{p(n-1)} \rangle$ 、さらに、 $C_{p2} = \langle A_{p(n+1)}A_{p(n-1)} \rangle$  と置いている。 $\langle A_p^2 \rangle$  については、連続時間の雑音評価から、

$$\langle A_p^2 \rangle = \frac{i_p^2}{2} \int_0^\infty f^2(t) dt.$$

である。RC フィルターの場合には、この積分自体は収束しないにもかかわらず  $\langle I_p^2 \rangle$  全体としては有限な値を与える点に注目して欲しい。下記の表 1 を用いて確認のこと。ここでも、 $g_{-1} + g_0 + g_1 = 0$  が効いていることに注意すること。また、 $C_{pk}$  については、周波数領域で評価することによって見通しが良くなる。すなわち、

$$C_{pk} = \frac{1}{2} i_p^2 \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega k T} |F^l(i\omega)|^2 df,$$

の積分を実行すれば良い。ただし、 $F^l$  は、 $f(t)$  のラプラス変換である。CR-RC フィルターの場合についても同様にして評価することができる。

Since parallel noise is located in parallel with the true signal source, the input noise series  $\{I_{pn}\}$  for the parallel noise can be presented in a similar way as the true signal.

As long as you are considering a the system with the RC filter, or the CR-RC filter, the input series is reconstructed as

Employing the above relation, we evaluate  $\langle I_{pn}^2 \rangle$ . In practice, it is written as

where we assume a steady state condition, and, hence, the  $n$ -dependence disappears. The new symbols ( $A_p$ ,  $C_{p1}$ , and  $C_{p2}$ ) are defined as  $\langle A_p^2 \rangle = \langle A_{p(n+1)}^2 \rangle = \langle A_{pn}^2 \rangle = \langle A_{p(n-1)}^2 \rangle$ ,  $C_{p1} = \langle A_{p(n+1)}A_{pn} \rangle = \langle A_{pn}A_{p(n-1)} \rangle$ , and  $C_{p2} = \langle A_{p(n+1)}A_{p(n-1)} \rangle$ . Assisted by continuous-time noise theory, we obtain for  $\langle A_p^2 \rangle$

You should be aware that  $\langle I_p^2 \rangle$  remains at a finite value while  $\langle A_p^2 \rangle$ ,  $\langle C_{p1}^2 \rangle$ , and  $\langle C_{p2}^2 \rangle$  tend to infinity. According to Table 1, you find that the constraint  $g_{-1} + g_0 + g_1 = 0$  works to maintain  $\langle I_p^2 \rangle$  to be finite. The evaluations for  $C_{pk}$  become straightforward by employing a frequency-domain presentation; the integration over frequency is executed as follows:

where  $F^l$  is the Laplace transform of  $f(t)$ . We can execute similar evaluations for the CR-RC filter case.

Table 1: Correlation coefficients for parallel noise.

	RC filter	CR-RC filter
Impulse response	$1 - \exp(-\frac{t}{T_M})$	$(\frac{t}{T_M}) \exp(1 - \frac{t}{T_M})$

Table 1: Correlation coefficients for parallel noise.

$g_{-1}^2 + g_0^2 + g_1^2$	$\frac{2(1 + e^{-x} + e^{-2x})}{(1 - e^{-x})^2}$	$\frac{e^{-2}}{x^2}(e^{2x} + 4 + e^{-2x})$
$(g_{-1} + g_1)g_0$	$-\frac{(1 + e^{-x})^2}{(1 - e^{-x})^2}$	$-\frac{2e^{-2}}{x^2}(e^{-x} + e^x)$
$g_{-1}g_1$	$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$	$\frac{e^{-2}}{x^2}$
$\langle A_p^2 \rangle$	not assigned	$\frac{e^2 T_M}{8} i_p^2$
$C_{p1}$	$\langle A_p^2 \rangle - \frac{T_M}{4}(x - 1 + e^{-x})i_p^2$	$\frac{e^2 T_M}{8}(1 + x)e^{-x}i_p^2$
$C_{p2}$	$\langle A_p^2 \rangle - \frac{T_M}{4}(2x - 1 + e^{-2x})i_p^2$	$\frac{e^2 T_M}{8}(1 + 2x)e^{-2x}i_p^2$
$C_{p3}$	$\langle A_p^2 \rangle - \frac{T_M}{4}(3x - 1 + e^{-3x})i_p^2$	$\frac{e^2 T_M}{8}(1 + 3x)e^{-3x}i_p^2$

結局、RC フィルターでは、

Eventually, the RC filter provides

$$\langle I_p^2 \rangle = \frac{T_M}{2} i_p^2 \frac{1}{(1 - e^{-x})^2} \{x(1 + e^{-2x}) - (1 - e^{-2x})\}$$

となり、CR-RC フィルターでは、

for  $\langle I_p^2 \rangle$ . As for the CR-RC filter,  $\langle I_p^2 \rangle$  can be represented as

$$\langle I_p^2 \rangle = \frac{T_M}{8} i_p^2 \frac{e^{2x} - 4x - e^{-2x}}{x^2}.$$

である。これらは、 $x \rightarrow 0$  の極限でゼロに漸近する一方、 $x \rightarrow \infty$  の極限では、両者とも増大しつづける。ただし、RC フィルターでは、 $x$  に比例する増大であるのに対して、CR-RC フィルターでは、 $e^{2x}/x^2$  に比例する急峻な増大である点で相違する。

Both of these tend to zero in the limit  $x \rightarrow 0$ . On the other hand, they tend to diverge in the limit  $x \rightarrow \infty$ . The divergence for the CR-RC filter is more steeper than that of the RC filter.

### 9.5.2 Contribution of the series noise

雑音成分には、上記のように本来の信号成分と同等に応答する並列雑音のほかに、微分特性を有する雑音成分が存在する。この雑音成分は、直列雑音と呼ばれており、並列雑音と同様の性質を持つ雑音  $I_s$  を導入しておいて、これに微分を施すことによって導入することができる。

直列雑音に対して、出力は、 $f'(t)$  のように応答するから、系列  $\{f'(nT_s)\}$  に対する  $z$  - 変換を調べておく必要がある。 $f(t)$  のラプラス変換を  $F^l(s)$  とおくと、系列  $\{f'(nT_s)\}$  の  $z$  - 変換  $F^d(z)$  は、

In addition to the parallel noise, there exists another noise component, called the series noise, which behaves something like a derivative of the parallel noise. Series noise can be introduced by differentiating a noise source  $I_s$ , which behaves similar to the parallel noise.

Since the signal-processing chain responds as  $f'(t)$  for an impulse of the series noise, we need to examine the  $z$ -transformation corresponding to the series  $\{f'(nT_s)\}$ . Denoting the Laplace transform of  $f(t)$  as  $F^l(s)$ , the  $z$ -transformation for  $\{f'(nT_s)\}$  can be presented as

$$F^d(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{sF^l(s)}{1 - z^{-1}e^{sT_s}} ds.$$



によって得ることができる。もちろん  $\sum_{k=0}^{\infty} f'(kT_s)z^{-k}$  を直接評価しても良い。そこで、RC フィルターの場合には、 $s_0 = 1/T_M$  とおくと、 $F^l(s) = \frac{s_0}{s(s+s_0)}$  であるから

An alternative way to evaluate the z-transformation is to directly evaluate  $\sum_{k=0}^{\infty} f'(kT_s)z^{-k}$ . As for the RC filter, its Laplace transform is  $F^l(s) = \frac{s_0}{s(s+s_0)}$ , where  $s_0 = 1/T_M$ , and, hence, the z-transformation  $F^d(z)$  is represented as

$$F^d(z) = \frac{1}{T_M(1 - z^{-1}e^{-x})}.$$

を得る。一方、CR-RC フィルターでは、 $F^l(s) = \frac{es_0}{(s+s_0)^2}$  であるから

In a similar fashion, employing the Laplace transform,  $F^l(s) = \frac{es_0}{(s+s_0)^2}$ , for the CR-RC filter, we obtain the corresponding z-transformation as follows:

$$F^d(z) = \frac{e}{T_M} \frac{1 - (1+x)e^{-x}}{(1 - z^{-1}e^{-x})^2}.$$

を得る。結局、直列雑音の信号系列  $\{I_{sn}\}$  と信号処理系の出力における信号系列  $\{A_{sn}\}$  の間には

Eventually, there stands the relation

$$F^d(z) \sum_{k=0}^{\infty} I_{sk}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{sk}z^{-k}$$

のような関係式が成立する。そこで、上式の両辺に  $F^d(z)^{-1}$  を乗じて、時刻  $nT$  の成分を抽出すると、

between the input signal series  $\{I_{sn}\}$  for the series noise and the output signal series  $\{A_{sn}\}$  for the signal processing chain. In order to extract a signal at time  $nT$ , we apply  $F^d(z)^{-1}$  for each side of the equation, which yields

$$I_{sn}u_0 + I_{s(n+1)}u_{-1} = A_{s(n+1)}g_{-1} + A_{sn}g_0 + A_{s(n-1)}g_1.$$

を得る。さらに、両辺の二乗平均をとることにより、

Taking a quadratic mean for each side, we obtain

$$\langle I_s^2 \rangle (u_0^2 + u_{-1}^2) = (g_{-1}^2 + g_0^2 + g_1^2) \langle A_s^2 \rangle + 2(g_{-1} + g_1)g_0C_{s1} + 2g_{-1}g_1C_{s2},$$

を得る。ただし、 $\langle I_{sn}I_{s(n+1)} \rangle = 0$  を用いた。また、 $\langle A_s^2 \rangle = \langle A_{s(n+1)}^2 \rangle = \langle A_{sn}^2 \rangle = \langle A_{s(n-1)}^2 \rangle$ 、 $C_{s1} = \langle A_{p(n+1)}A_{pn} \rangle = \langle A_{pn}A_{p(n-1)} \rangle$ 、さらに、 $C_{s2} = \langle A_{p(n+1)}A_{p(n-1)} \rangle$  とおいた。 $\langle A_s^2 \rangle$  については、連続時間の雑音評価から、

where we have employed  $\langle I_{sn}I_{s(n+1)} \rangle = 0$ ,  $\langle A_s^2 \rangle = \langle A_{s(n+1)}^2 \rangle = \langle A_{sn}^2 \rangle = \langle A_{s(n-1)}^2 \rangle$ ,  $C_{s1} = \langle A_{p(n+1)}A_{pn} \rangle = \langle A_{pn}A_{p(n-1)} \rangle$  and  $C_{s2} = \langle A_{p(n+1)}A_{p(n-1)} \rangle$ .  $\langle A_s^2 \rangle$  is evaluated as follows:

$$\langle A_s^2 \rangle = \frac{v_s^2 C_s^2}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\}^2 dt$$

である。ここで、 $v_s$  は、信号源に直列に配置された電圧性の雑音源を表わし、 $C_s$  は、本来の信号源に並列に配置された信号源容量を表わしている。さらに、 $C_{sk}$  は、

as has been practiced for a continuous time noise evaluation.  $v_s$  represents a voltage noise source located in series to the signal source.  $C_s$  represents a source capacitance located in parallel with the signal source.  $C_{sk}$  can be evaluated by executing the integral

$$C_{sk} = \frac{1}{2} i_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega k T} \omega^2 |F^l(i\omega)|^2 df.$$

の積分を実行することによって評価することができる。表 2 には、諸係数をまとめているので確認されたい。

Table 2 is a summary of the coefficients so far discussed, which are worth confirming as a part of the drill.

Table 2: Correlation coefficients for the series noise.

	RC filter	CR-RC filter
$u_0$	$\frac{1}{T_M(1-e^{-x})}$	$\frac{e^x}{T_M x}$
$u_{-1}$	$-\frac{1}{T_M(1-e^{-x})}$	$-\frac{x+1}{T_M x}$
$u_0^2 + u_{-1}^2$	$\frac{2}{T_M^2(1-e^{-x})^2}$	$\frac{e^{2x} + (x+1)^2}{T_M^2 x^2}$
$\langle A_s^2 \rangle$	$\frac{1}{4T_M} v_s^2 C_s^2$	$\frac{e^2}{8T_M} v_s^2 C_s^2$
$C_{s1}$	$\frac{1}{4T_M} v_s^2 C_s^2 e^{-x}$	$\frac{e^2}{8T_M} v_s^2 C_s^2 (1-x)e^{-x}$
$C_{s2}$	$\frac{1}{4T_M} v_s^2 C_s^2 e^{-2x}$	$\frac{e^2}{8T_M} v_s^2 C_s^2 (1-2x)e^{-2x}$
$C_{s3}$	$\frac{1}{4T_M} v_s^2 C_s^2 e^{-3x}$	$\frac{e^2}{8T_M} v_s^2 C_s^2 (1-3x)e^{-3x}$

実際に観測される雑音は、 $\langle I_s^2 \rangle > (u_0^2 + u_{-1}^2)$  であるから、結局 RC フィルターでは、

$\langle I_s^2 \rangle > (u_0^2 + u_{-1}^2)$  can be interpreted as the observed noise at the output of the signal-processing chain. The right-hand side of the above equation can be evaluated as

$$\langle I_s^2 \rangle > (u_0^2 + u_{-1}^2) = \frac{1}{2T_M} v_s^2 C_s^2 \frac{1-e^{-2x}}{(1-e^{-x})^2}$$

となり、CR-RC フィルターでは、

for the RC filter, and

$$\langle I_s^2 \rangle > (u_0^2 + u_{-1}^2) = \frac{1}{8T_M} v_s^2 C_s^2 \frac{e^{2x} + 4x - e^{-2x}}{x^2}$$

となる。RC フィルターの方は、 $x$  の関数として単調に減少しているのに対して、CR-RC フィルターの方は、 $x \sim 1$  付近で最小値を有する下に凸の形状を示している。

for the CR-RC filter. As a function of  $x$ , the noise power for the series noise with the RC filter exhibits a monotonous decrease, while with the CR-RC filter it shows a minimum at around  $x \sim 1$ .

図 1 に示すように、RC フィルターのような単なる積分回路が、CR-RC 型のフィルター回路よりも良好な性能を発揮することできることに注目して欲しい。 $x > 1.5$  の領域に注目すれば明白である。このように、離散系では、連続時間系では全く使い物にならないと思われていた「単なる積分回路」が有力な方式として浮かび上がってくる。

It is remarkable to find that just an integrator, such as the RC filter, exhibits a superior performance than the CR-RC filter, which is quite apparent for  $x > 1.5$ . The RC filter, which is considered to be useless in continuous-time signal processing, resurfaces here as a usable scheme in discrete-time signal processing.

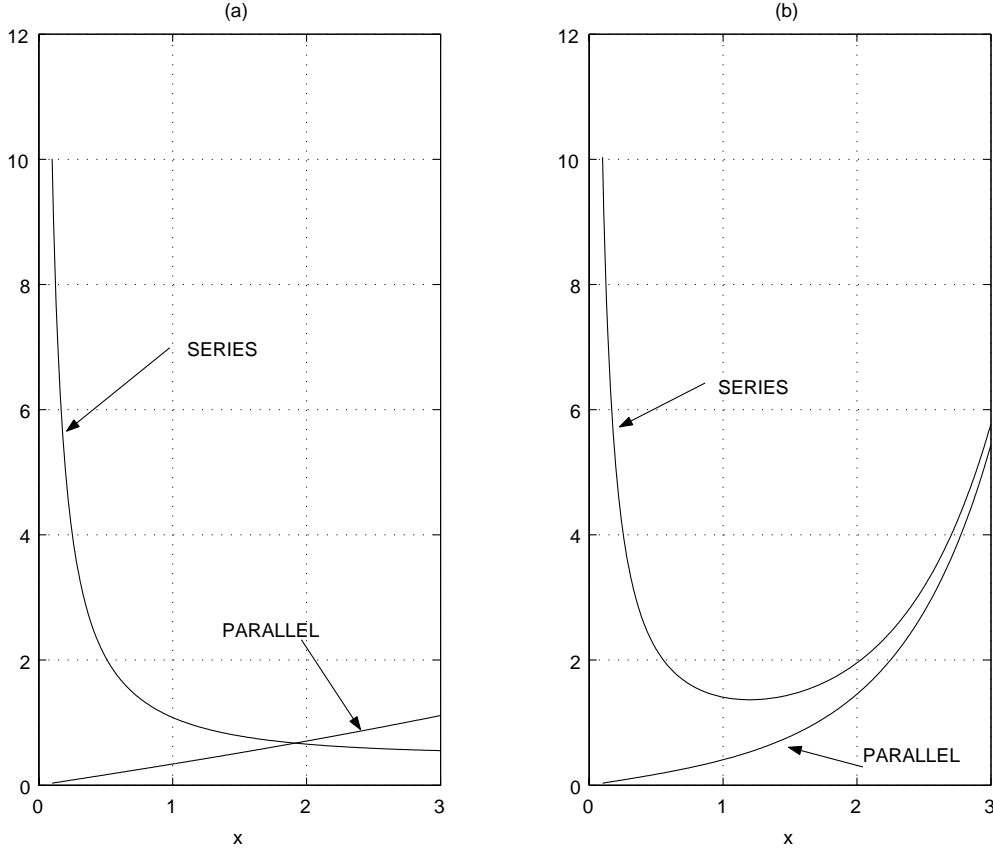


Figure 1: x-dependence for the parallel and series noises.

(a) は RC フィルター、(b) は CR-RC フィルターについて示してある。ただし、パラレル雑音については、 $i_p^2 T_M$  でノーマライズしてある。また、シリーズ雑音については、 $v_s^2 C_s^2 / T_M$  でノーマライズしてある。

(a) shows an x-dependence as for the RC filter, while (b) shows the case for the CR-RC filter. The parallel noise is normalized by  $i_p^2 T_M$ . The series noise is normalized by  $v_s^2 C_s^2 / T_M$ .

## 9.6 Reconstruction of the asynchronous input signal series

前節の議論は、入力信号インパルス列、及び出力信号のサンプリングに係る時間が同一の離散時間列においてのみ生ずることを特徴としていた。しかし、一般に、入力事象の発生は、出力信号のサンプリング時間系列とは、非同期であるから、入力信号のタイミングおよび大きさを離散時間列上の情報から再構成する必要がある。以下、RC フィルターを伴う場合に限定して、波高とタイミングの再構成、及びそれらの決定精度について議論する。

The discussion in the previous section was constrained by the fact that charge injection for the input and the sampling at the output were executed at the common series of discrete time points.

The actual signals for a radiation detector are generally induced asynchronous to the sampling timing, and, hence, we need to reconfigure the scheme of the amplitude reconstruction as well as the extraction of the event timing so as to comply with a random arrival of the input charge.

The discussion in the following is restricted for the case of the RC-filter to explain a scheme for the amplitude/timing extraction and their resolutions.

$\eta$  を  $0 < \eta < 1$  なる実数として、入力信号のインパルスが  $Q_0\delta(t - (n + \eta)T_s)$  のように発生したとすると、出力信号系列は、

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= 0, \\ A_n &= 0, \\ A_{n+1} &= Q_0(1 - \exp\{-(1 - \eta)x\}), \\ A_{n+2} &= Q_0(1 - \exp\{-(2 - \eta)x\}), \end{aligned}$$

となる。したがって、前節の手法によって

$$\begin{aligned} I_n &= Q_0 \frac{1 - \exp\{-(1 - \eta)x\}}{1 - e^{-x}}, \\ I_{n+1} &= Q_0 \frac{-\exp(-x) + \exp\{-(1 - \eta)x\}}{1 - e^{-x}}. \end{aligned}$$

を得る。そこで、前記二式を連立することにより、

$$\begin{aligned} Q_0 &= I_n + I_{n+1}, \\ \eta &= 1 + \frac{1}{x} \ln\left\{\frac{I_n \exp(-x) + I_{n+1}}{I_n + I_{n+1}}\right\}. \end{aligned}$$

を得る。入力電荷が近接する二つの離散点に振り分けて再構成されており、単にこれらの和を求めることにより入力電荷の総量を得ることができるようになっていくことが分かる。また、信号の入力時間についても、 $I_n$  と  $I_{n+1}$  との比較的簡単な演算によって導くことができることが分かる。

Once we assume that the input charge is generated in such a way as  $Q_0\delta(t - (n + \eta)T_s)$  with a positive  $\eta$  smaller than 1, the output series can be presented as

and, hence, we can reconstruct the input series as follows:

Solving above equations simultaneously, we obtain the  $Q_0$  and  $\eta$  as follows:

You should be aware that the input signal is reconstructed so as to be separated into adjacent time points; the sum over these time points provides the input charge,  $Q_0$ . The timing for the charge impulse can be obtained with a direct calculation employing  $I_n$  and  $I_{n+1}$ .

## 9.7 Resolution of the reconstructed signal series

### 9.7.1 Amplitude resolution

問題は、このようにして得られた  $Q_0$ 、及び  $\eta T_s$  の決定精度である。これらについて合理的な精度が確保されなければ、有用性は完全に減殺されてしまうからである。先ず、波高  $Q_0$  の決定精度について議論した後、時間  $\eta T_s$  の決定精度について述べる。

波高の分散は、

A question raised concerning the above-mentioned scheme is how precisely the amplitude  $Q_0$  or the timing  $\eta T_s$  can be determined. The availability of the above-mentioned scheme will be considerably diminished unless we can achieve a reasonable resolution for the amplitude and/or timing measurement.

The resolution for the amplitude measurement is discussed first, followed by a discussion of the timing measurement.

The variance of the amplitude  $Q_0$  can be written as

$$\langle \Delta Q_0^2 \rangle = \langle \Delta I_n^2 \rangle + 2 \langle \Delta I_n \Delta I_{n+1} \rangle + \langle \Delta I_{n+1}^2 \rangle,$$

のように書き下すことができる。以下、繁雑さを解消するために  $\Delta$  の記号を省略する。ここで、 $\langle I_n^2 \rangle = \langle I_{n+1}^2 \rangle = (g_{-1}^2 + g_0^2 + g_1^2)(\langle A_p^2 \rangle + \langle A_s^2 \rangle) + 2(g_{-1} + g_1)g_0(C_{p1} + C_{s1}) + 2g_{-1}g_1(C_{p2} + C_{s2})$ 、であるから、新たに評価すべきは、 $\langle I_n I_{n+1} \rangle$  である。 $I_n = g_{-1}A_{n+1} + g_0A_n + g_1A_{n-1}$  の関係式に立ち返ると、

$$\begin{aligned} \langle I_n I_{n+1} \rangle &= (\langle A_p^2 \rangle + \langle A_s^2 \rangle)(g_{-1}g_0 + g_0g_1) \\ &+ (C_{1p} + C_{1s})(g_{-1}g_1 + g_{-1}^2 + g_0^2 + g_1^2) \\ &+ (C_{2p} + C_{2s})(g_{-1}g_0 + g_1g_0) \\ &+ (C_{3p} + C_{3s})g_1g_{-1}. \end{aligned}$$

を得る。さらに、 $g_{-1} + g_0 + g_1 = 0$  の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \langle I_n I_{n+1} \rangle &= \{\langle A_p^2 \rangle + \langle A_s^2 \rangle + C_{2p} + C_{2s} - 2(C_{1p} + C_{1s})\}(g_{-1}g_0 + g_0g_1) \\ &+ \{(C_{3p} + C_{3s}) - (C_{1p} + C_{1s})\}g_{-1}g_1, \end{aligned}$$

のように整理することができる。ここでも、発散する量である  $\langle A_p^2 \rangle$  は、成功裏にキャンセルしていることが分かる。また、 $\eta$  に関する依存性がないことも注目に値する。

### 9.7.2 Timing resolution

次に、 $\eta$  の精度の評価に移る。

where the symbol  $\Delta$  is omitted for the sake of simplicity. Since we already know  $\langle I_n^2 \rangle = \langle I_{n+1}^2 \rangle = (g_{-1}^2 + g_0^2 + g_1^2)(\langle A_p^2 \rangle + \langle A_s^2 \rangle) + 2(g_{-1} + g_1)g_0(C_{p1} + C_{s1}) + 2g_{-1}g_1(C_{p2} + C_{s2})$ , what we need to evaluate here is  $\langle I_n I_{n+1} \rangle$ . Remembering the relation  $I_n = g_{-1}A_{n+1} + g_0A_n + g_1A_{n-1}$ , we obtain

Applying further the relation  $g_{-1} + g_0 + g_1 = 0$ , we finally obtain

where the divergent quantity  $\langle A_p^2 \rangle$  is successfully cancelled out; also there is no  $\eta$  dependence.

The next discussion is concerned with the measurement resolution for  $\eta$ . Upon differentiating the presentation in §9.6 for  $\eta$ , we obtain

$$\Delta\eta = \frac{(e^{-\eta x} - 1)\Delta I_n + (e^{-(\eta-1)x} - 1)\Delta I_{n+1}}{xQ_0},$$

と書けることに注意し、さらに、右辺の評価において記号  $\Delta$  を省略すると、

and, hence, the variance of  $\eta$  can be written as

$$\langle \Delta\eta^2 \rangle = \frac{1}{x^2Q_0^2} \{((e^{-\eta x} - 1)^2 + (e^{-(\eta-1)x} - 1)^2) \langle I_n^2 \rangle + 2(e^{-\eta x} - 1)(e^{-(\eta-1)x} - 1) \langle I_n I_{n+1} \rangle\},$$

となる。ここで、 $Q_0$  が大きいほどタイミング精度が改善することは、直感的な理解に一致する。

which gives a smaller variance for the larger amplitude  $Q_0$  to comply with an intuitive understanding.

### 9.7.3 Examples

そこで、具体的に数値を当てはめてみることにする。

パラレル雑音

We now numerically examine the above-described variances.

In order to evaluate the parallel noise,

$$i_p^2 = 2qi_L + \frac{4kT}{R_B} + \frac{4kT}{R_f},$$

において、漏れ電流を  $i_L = 1 \text{ pA}$ 、バイアス抵抗、および、前置増幅器の帰還抵抗を、 $R_B = R_f = 50 \text{ M}\Omega$  とおく。  
次に、シリーズ雑音

we assume here  $i_L = 1 \text{ pA}$  for the leakage current, and  $R_B = R_f = 50 \text{ M}\Omega$  for the bias resistor and the feed-back resistor of a preamplifier.  
In order to evaluate the series noise,

$$v_s^2 = \frac{2}{3} \frac{4kT}{g_m},$$

において、トランスコンダクタンスを  $g_m = 2 \text{ mS}$  とする。さらに、 $T = 300 \text{ K}$ 、 $C_s = 4 \text{ pF}$ 、 $T_M = 300 \text{ ns}$ 、 $T_s = 300 \text{ ns}$ 、 $Q_0 = 20000e$  をデフォルト値とする。これらのパラメータは半導体ピクセルデバイスを想定しているものである。

we assume  $g_m = 2 \text{ mS}$  for the transconductance of the input FET for the preamplifier,  $T = 300 \text{ K}$  for the temperature,  $C_s = 4 \text{ pF}$  for the detector capacitance together with the gate capacitance of the input FET,  $T_M = 300 \text{ ns}$  for the time constant of the low-pass filter,  $T_s = 300 \text{ ns}$  for the sampling interval, and  $Q_0 = 20000e$  for the input charge, unless otherwise specified. These parameters are consistent with a fine-segmented pixel detector.

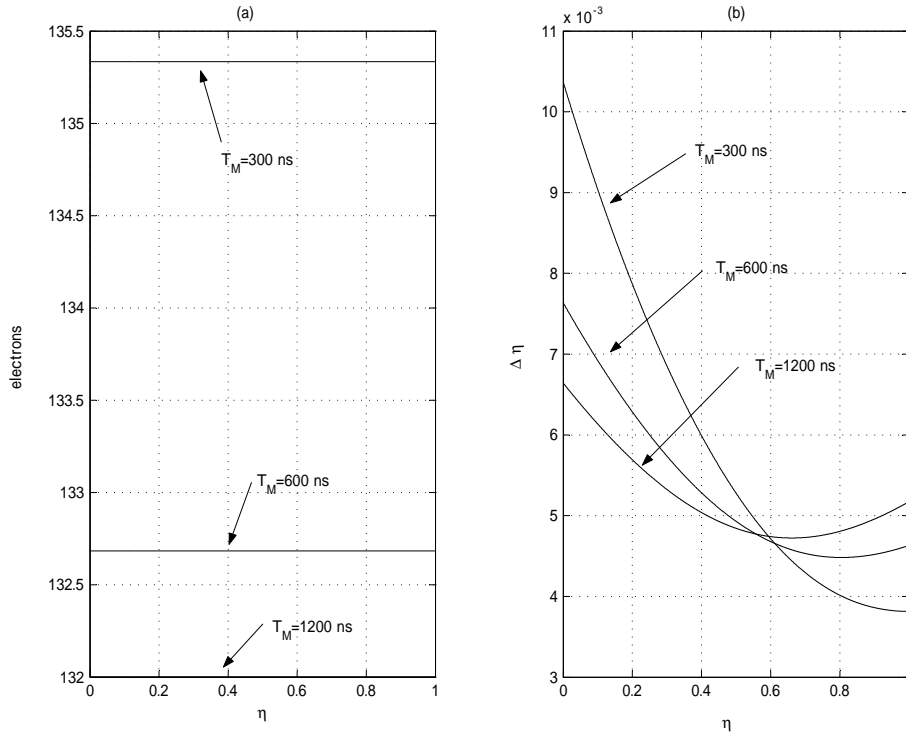


Figure 2: Equivalent noise electrons and time resolution for the asynchronous events.

(a) は、 $Q_0$  の精度を雑音電子数として表わしている。(b) は、 $\eta$  の精度を表わしている。いずれも横軸は、 $\eta$  である。それぞれ、 $T_M = 300, 600, 1200 \text{ ns}$  に対応する 3 本のカーブを示してある。

(a) depicts the resolution of  $Q_0$  in electrons. (b) depicts the resolution for  $\eta$ . The horizontal axis presents  $\eta$  ranging from 0 to 1. The three curves for each plot are for  $T_M = 300, 600, 1200 \text{ ns}$ .

図 2 (a) によれば、 $Q_0$  の分散は、 $\eta$  に依存せずに  $T_M = 1200 \text{ ns}$ 、 $600 \text{ ns}$ 、 $300 \text{ ns}$  に対して、それぞれ、 $132e$ 、 $132.7e$ 、及び  $135.3e$  程度の値をとることが分かる。一方、図 2 (b) によれば、 $\eta$  の分散は、 $\eta$  それ自身に依存し、一般に、 $\eta$  の大きい側で良好な値を示し、 $\eta$  の小さい側で悪化する。これから、 $T_s \eta$  を、 $1.2 \sim 3 \text{ ns}$  程度の精度で決定することができることが分かる。

以上

According to Fig. 2(a), we find that the amplitude  $Q_0$  can be determined with resolutions  $132e$ ,  $132.7e$ , and  $135.3e$  for  $T_M = 1200 \text{ ns}$ ,  $600 \text{ ns}$ , and  $300 \text{ ns}$  irrelevant of  $\eta$ .

On the other hand, according to Fig. 2 (b), the resolution of  $\eta$  has a  $\eta$ -dependence and in general improves for larger values of  $\eta$ , and deteriorates for smaller values of  $\eta$ . We eventually find a timing resolution of  $1.2 \sim 3 \text{ ns}$  for the parameters assumed here.